MATH 60604
Modélisation statistique
§ 4b - Régression logistique

HEC Montréal
Département de sciences de la décision

Modèles linéaires généralisés pour données binaires

- Si notre variable réponse est binaire, on peut supposer que Y_i suit une loi Bernoulli de paramètre π_i, $Y_i \sim \text{Bin}(\pi_i)$, où

$$\pi_i = \text{P}\left(Y_i = 1 \mid \mathbf{X}_i\right) = \text{E}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i\right).$$

- La fonction de liaison la plus courante pour les réponses binaires est la fonction logit

$$g(z) := \text{logit}(z) = \ln\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

soit la **fonction quantile de la loi logistique** qui ici relie $\text{E}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i\right) = \pi_i(\mathbf{X}_i)$ et η_i.

Fonction de liaison logit

- Le modèle logistique spécifie

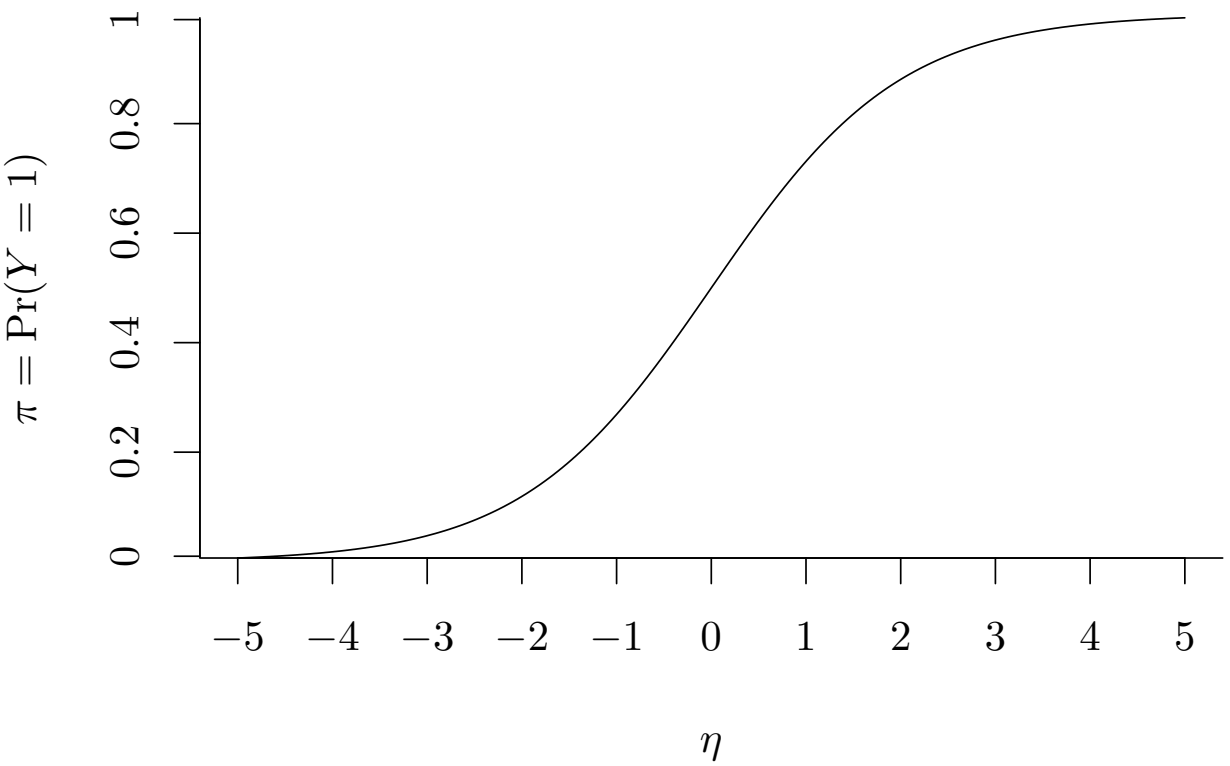
$$\eta_i = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip}.$$

- Ce modèle peut être exprimé sur l'échelle de la moyenne à l'aide de la fonction inverse de logit (expit),

$$\mathrm{E}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i\right) = \pi_i = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip})}.$$

- Cela donne une expression pour la moyenne $\pi_i = \mathrm{E}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i\right)$ en fonction des variables explicatives $\mathbf{X}_i$, mais...
  - à quoi ressemble cette fonction?
  - que nous apprend-elle sur la relation entre π_i et η_i (et donc $\mathbf{X}_i$)?

Fonction de répartition logistique



- On voit que π est une **fonction croissante** de $\eta = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_j$.
  - Si β_j est positif et X_j augmente, P $(Y = 1)$ augmente aussi.
  - Si β_j est négatif et X_j augmente, P $(Y = 1)$ diminue.
- La relation entre P $(Y = 1)$ et η (et donc aussi X_j) est nonlinéaire.

Interprétation des paramètres de la régression logistique

- Quantifier les effets des paramètres $\boldsymbol{\beta}$ de la régression logistique est compliqué à cause de la nonlinéarité.
- L'effet des coefficients est en terme de cote et de rapports de cote.
- Soit $\pi = \mathrm{P}\left(Y = 1 \mid \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p\right)$ et le modèle de régression logistique

$$\ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_1 + \cdots + \beta_p \mathrm{X}_p.$$

- Si on prend l'exponentielle de chaque côté de l'équation précédente, on obtient

$$\text{cote}(Y \mid \mathbf{X}) = \frac{\pi(\mathbf{X})}{1-\pi(\mathbf{X})} = \exp(\beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_1 + \cdots + \beta_p \mathrm{X}_p),$$

où $\pi(\mathbf{X})/\{1-\pi(\mathbf{X})\}$ est la cote de $\mathrm{P}\left(Y = 1 \mid \mathbf{X}\right)$ par rapport à $\mathrm{P}\left(Y = 0 \mid \mathbf{X}\right)$.

Cote

- L'utilisation de la fonction de liaison logit donne un modèle pour le **log de la cote**.
- La cote pour une variable binaire Y est le rapport

$$\text{cote}(\pi) = \frac{\pi}{1-\pi} = \frac{\mathrm{P}(Y=1)}{\mathrm{P}(Y=0)}.$$

- Par exemple, une cote de 4 signifie que la probabilité de $Y = 1$ est quatre fois plus élevée que la probabilité de $Y = 0$.
- Une cote de 0,25 à l'inverse veut dire que la probabilité de $Y = 1$ est seulement le quart de celle pour $Y = 0$, ou encore que la probabilité de $Y = 0$ est quatre fois plus élevée que celle pour $Y = 1$.

$\mathrm{P}(Y=1)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
cote	0,11	0,25	0,43	0,67	1	1,5	2,33	4	9
cote (frac.)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{3}$	4	9

Interprétation de l'ordonnée à l'origine en termes de cote

- Si $X_1 = \cdots = X_p = 0$, il est clair que

$$\text{cote}(Y \mid \mathbf{X} = \mathbf{0}_p) = \exp(\beta_0)$$

et

$$\mathrm{P}\left(Y = 1 \mid \mathbf{X} = \mathbf{0}_p\right) = \frac{\exp(\beta_0)}{1 + \exp(\beta_0)}$$

représente la probabilité que $Y = 1$ quand $\mathbf{X} = \mathbf{0}_p$.

- Comme pour la régression linéaire, $X_1 = \cdots = X_p = 0$ peut être impossible; dans ce cas, β_0 ne s'interprète pas.

Interprétation des paramètres en termes de rapports de cotes

On considère pour faire simple un modèle logistique de la forme

$$\text{logit}(\pi) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Le facteur $\exp(\beta_1)$ est le changement dans la cote quand X augmente d'une unité,

$$\text{cote}(Y \mid X = x + 1) = \exp(\beta_1) \times \text{cote}(Y \mid X = x).$$

- Si $\beta_1 = 0$, le rapport des cotes vaut un: X n'impacte pas la cote de Y
- Si β_1 est positif, le rapport des cotes $\exp(\beta_1)$ excède un: si X croît, la cote de Y augmente.
- Si β_1 est négatif, le rapport des cotes $\exp(\beta_1)$ est inférieur à un: si X croît, la cote de Y décroît.

Quand il y a plusieurs variables explicatives, l'interprétation de β_1 est identique, mais elle n'est valide que quand toutes les autres variables explicatives sont égales par ailleurs.

Interprétation de β_k en terme de rapport de cote

Dans le modèle logistique, le rapport de cotes quand $X_k = x_k + 1$ versus $X_k = x_k$ quand $X_j = x_j$ $(j = 1, \ldots, p, j \neq k)$ est

$$\frac{\text{cote}(Y \mid X_k = x_k + 1, X_j = x_j, j \neq k)}{\text{cote}(Y \mid X_k = x_k, X_j = x_j, j \neq k)} = \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j + \beta_k\right)}{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j\right)}$$
$$= \exp(\beta_k).$$

Quand X_k augmente d'une unité **et que la valeur de toutes les autres covariables est constante**, la cote de Y est multipliée par un $\exp(\beta_k)$.

- La cote augmente si $\exp(\beta_k) > 1$, c'est-à-dire si $\beta_k > 0$.
- La cote diminue si $\exp(\beta_k) < 1$, c'est-à-dire si $\beta_k < 0$.