

MATH 60604
Modélisation statistique
§ 4g - Taux et termes de décalage

HEC Montréal
Département de sciences de la décision

- Jusqu'à présent, nous avons supposé que la variable de dénombrement Y était **comparable** d'un individu à l'autre.
 - Dans l'exemple d'achats, Y_i représentait le nombre de fois que le sujet i avait acheté le produit dans le mois suivant l'étude.
- Et si la période de suivi variait d'un individu l'autre?
 - le nombre d'accidents de travail dans une entreprise pour une période donnée dépend du nombre d'employés.
 - le nombre de cancer par région dépend du nombre d'habitants.

Si les nombres ne sont pas comparables, on peut considérer les **taux** (nombre d'achats par mois, nombre d'accident par employé, etc.)

Si on modélise le taux avec le modèle de Poisson, ce dernier est adéquat **seulement** si le taux est **faible**.

La *National Highway Traffic Safety Administration* (NHTSA) compile des statistiques sur le nombre de morts sur les routes aux États-Unis. Les données `accident` dénombre les décès en 2010 et en 2018 par États, recensés par régions géographiques (`region`) telles que définies par la NHTSA et catégorisées selon le `moment` où l'accident a eu lieu (jour ou nuit).

- Soit Y_i le nombre de décès à un moment donné durant une année donnée pour la région i ;
- Soit N_i le nombre d'habitants dans la région i .

Notre objectif est d'estimer la relation entre nombre d'accident fatal selon le moment de la journée et l'année.

Fatal Motor Vehicle Crashes¹

Note: Click on the link within a table cell to map crash locations

Crash Date (Year) by NHTSA Region		Time Of Day			
		Daytime	Nighttime	Unknown	Total
2010	1 = ME, MA, NH, RI, VT	196	210	1	407
	2 = CT, NJ, NY, PA, PR	917	964	1	1,882
	3 = DE, DC, KY, MD, NC, VA, WV	539	642	2	1,183
	4 = AL, FL, GA, SC, TN	1,233	1,613	13	2,859
	5 = IL, IN, MI, MN, OH, WI	899	1,005	1	1,905
	6 = LA, MS, NM, OK, TX	810	1,307	7	2,124
	7 = AR, IA, KS, NE, MO	295	313	1	609
	8 = CO, NV, ND, SD, WY, UT	240	241	0	481
	9 = AZ, CA, HI	791	1,100	20	1,911
	10 = AK, ID, MT, OR, WA	140	211	1	352
	Total	6,060	7,606	47	13,713

Accidents de la route et décalage

- Si on ignore la taille de la population, le modèle de régression de Poisson (ou binomiale négative) s'écrirait

$$\ln(\mu_i) = \ln\{E(Y_i)\} = \beta_0 + \beta_1 \text{moment} + \beta_2 \text{annee}$$

- Si on prend en compte la taille de la population, cela revient à modéliser le taux Y_i/N_i plutôt que Y_i .
- On fixe

$$\ln \left\{ \frac{E(Y_i)}{N_i} \right\} = \beta_0 + \beta_1 \text{moment} + \beta_2 \text{annee}$$

ou de manière équivalente

$$\ln \{E(Y_i)\} = \beta_0 + \beta_1 \text{moment} + \beta_2 \text{annee} + \ln(N_i)$$

- Le terme $\ln(N_i)$ est un **terme de décalage**; une variable explicative incluse sans paramètre.

Code SAS pour inclure un terme de décalage

```
data accident;
set modstat.accident;
logpopn=log(popn);
run;
proc genmod data=accident;
class moment(ref="jour") annee(ref="2010");
model nmorts=moment annee / dist=negbin link=log
      offset=logpopn type3 lrci;
run;
```

L'option `offset` pourrait aussi être utilisée dans une régression de Poisson.

Informations sur le modèle	
Table	WORK.ACCIDENT
Distribution	Negative Binomial
Fonction Link	Log
Variable dépendante	nmorts
Variable de décalage	logpopn

Interprétation des paramètres avec décalage

Analyse des paramètres estimés du maximum de vraisemblance

Paramètre	DDL	Estimation	Erreur type	Rapport de vraisemblance		Khi-2 de Wald	Pr > khi-2	
				Intervalle de confiance à 95 %				
Intercept	1	-10.9062	0.0706	-11.0456	-10.7622	23869.7	<.0001	
moment	nuit	1	0.2266	0.0816	0.0628	0.3903	7.72	0.0055
moment	jour	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
annee	2018	1	0.2300	0.0816	0.0662	0.3938	7.95	0.0048
annee	2010	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
Dispersion	1	0.0648	0.0147	0.0426	0.1043			

- La variable de décalage $\ln(N)$ n'apparaît pas dans le tableau.
- La statistique de déviance (sortie omise) est 40,269 pour 37 degrés de liberté (rapport de 1,09). La valeur- p correspondante est 0,327, donc il n'y a pas de preuve que notre modèle est inadéquat.
- Le taux de mortalité durant le jour en 2010 est $\exp(\hat{\beta}_0) = \exp(-10,91)$ ou 1,83/100000, soit un taux de 1,83 décès par 100 000 habitants (avec intervalle de confiance à 95% $[1,60, 2,12] \times 10^{-5}$).
- On estime que la mortalité moyenne entre 2010 et 2018 augmente de 26%, puisque $\exp(0,23) = 1,26$.