MATH 60604
Modélisation statistique
§ 6c - Modèles linéaires mixtes

HEC Montréal
Département de sciences de la décision

Introduction aux modèles à effets aléatoires

Les modèles à effets aléatoires permettent d'inclure une corrélation intra-groupe et de faire des prédictions par groupe en plus d'inclure un effet de groupe au niveau de la population.

- La principale caractéristique des modèles linéaires mixtes est de permettre l'inclusion d'effets aléatoires, soit des paramètres qui varient d'un groupe à l'autre (ou d'une personne à l'autre pour les données répétées).
- Bien que l'on permettre à chaque groupe d'avoir un effet différent, la moyenne de ces effets est nulle.

Modèles avec effets aléatoires

- Lorsque une variable explicative est modélisée à l'aide d'un effet aléatoire, on suppose que l'effet total de cette variable est une combinaison de:
  1. un effet commun à toute la population
  2. un effet propre aux sujets d'un groupe.
- Par exemple, dans le cas de mesures répétées sur des individus, l'effet d'une variable pourrait être formé d'un effet commun à tous les individus de la population et d'un effet unique et différent pour chaque individu.
- Dans notre exemple sur la mobilisation des employés d'une unité, l'effet de l'ancienneté pourrait être formé d'un effet commun à tous les employés de l'entreprise et d'un effet unique et différent pour chaque unité.

Modèle linéaire mixte (formulation hiérarchique)

Le modèle linéaire mixte s'écrit

$$\begin{gathered} Y_i \mid \mathcal{B}_i = b_i \sim \mathsf{No}_{n_i}\left(\mathbf{X}_i\beta + \mathbf{Z}_i b_i, \mathbf{R}_i\right) \\ \mathcal{B}_i \sim \mathsf{No}_q(\mathbf{0}_q, \boldsymbol{\Omega}) \end{gathered}$$

- La réponse du groupe i, Y_i suit une loi normale conditionnellement aux **effets aléatoires** $\mathcal{B}_i$.
- On appelle désormais les coefficients β associés à la matrice du modèle $\mathbf{X}_i$ des **effets fixes**.

Modèle linéaire mixte: effets fixes

On peut écrire le modèle linéaire mixte comme

$$[Y_i \mid \mathcal{B}_i = b_i] = \mathbf{X}_i\beta + \mathbf{Z}_i b_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

où

- $Y_i = (Y_{i1}, \ldots, Y_{in_i})^\top$ est le vecteur de taille n_i contenant les réponses du groupe i.
- $\mathbf{X}_i$ est la matrice $n_i \times (p+1)$ de variables explicatives du groupe i, dont la ie ligne est $\mathbf{X}_{ij} = (1, \mathrm{X}_{ij1}, \ldots, \mathrm{X}_{ijp})^\top$.
  - La première colonne correspond à l'ordonnée à l'origine (vecteur de uns).
  - Les autres colonnes de $\mathbf{X}_i$ encodent chacune une variable explicative.
- β est le $(p+1)$ vecteur d'effets **fixes**.

Modèles linéaires mixtes: effets aléatoires

On peut écrire le modèle linéaire mixte comme

$$[Y_i \mid \mathcal{B}_i = b_i] = \mathbf{X}_i\beta + \mathbf{Z}_i b_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

où

- $\mathbf{Z}_i$ est une matrice $n_i \times q$ qui contient un **sous-ensemble** des colonnes de $\mathbf{X}_i$.
    - Les colonnes de $\mathbf{Z}_i$ sont associées aux **effets aléatoires**.
    - S'il n'y a pas d'effet aléatoire, $q = 0$ et on recouvre le modèle linéaire usuel.
- $\mathcal{B}_i = b_i$ est un q vecteur d'effets aléatoires propres au groupe i
- ε_i est un n_i vecteur d'erreurs pour le groupe i.

Forme générale pour les modèles mixtes

Dans le modèle linéaire mixte, à la fois $\boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ sont des vecteurs aléatoires. On suppose que

- les effets aléatoires $\boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}_j$ $(i \neq j)$ sont indépendants entre eux.
- les effets aléatoires $\boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ sont indépendants des erreurs $\boldsymbol{\varepsilon}_j$.
- les aléas $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ sont indépendants les uns des autres et ne dépendent pas des variables explicatives.
- à la fois $\boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ont espérance zéro

$$\mathsf{E}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}_i\right) = \mathbf{0}_{n_i}, \qquad \mathsf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i \mid \mathbf{X}_i\right) = \mathbf{0}_{n_i}$$

Moyenne et variance conditionnelles et marginales

On spécifie des modèles de covariance pour les effets aléatoires et les erreurs,

$$\mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}_i\right) = \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_i\right) = \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

La moyenne et la variance conditionnelles de Y_i sont

$$\mathrm{E}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i, \boldsymbol{\mathcal{B}}_i = b_i\right) = \mathbf{X}_i\beta + \mathbf{Z}_i b_i, \qquad \mathrm{Cov}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i, \boldsymbol{\mathcal{B}}_i = b_i\right) = \mathbf{R}_i$$

tandis que la moyenne et la variance marginales de Y_i sont

$$\mathrm{E}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i\right) = \mathbf{X}_i\beta, \qquad \mathrm{Cov}\left(Y_i \mid \mathbf{X}_i\right) = \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{Z}_i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Z}_i^\top + \mathbf{R}_i.$$

Paramètres d'un modèle mixte

Les paramètres du modèle à estimer sont

- le vecteur d'effets fixes, $\boldsymbol{\beta}$
- les paramètres $\boldsymbol{\psi}$ de la covariance marginale $\boldsymbol{\Sigma}$ de Y, qui découle de la structure de covariance des aléas et des effets aléatoires.

Effets groupes aléatoires

- Avec un modèle linéaire mixte,la moyenne conditionnelle $\mathsf{E}\left(Y_{ij} \mid \mathbf{X}_i, b_i\right)$ peut être interprétée comme une prédiction de la valeur de Y_{ij} après avoir pris en compte les effets spécifiques à un groupe.
- Quand on ajoute un effet aléatoire pour une variable groupe, on peut toujours estimer l'effet de variables fixes dans ce groupe.

Prédiction

- On peut prédire $\boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ par sa moyenne conditionnelle sachant Y_i,

$$\mathsf{E}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}_i \mid Y_i\right) = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Z}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(Y_i - \mathbf{X}_i\beta)$$

  où

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{Z}_i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Z}_i^\top + \mathbf{R}_i.$$

- On peut remplacer (ψ, β) par leurs estimés $(\widehat{\psi}, \widehat{\beta})$ pour obtenir une prédiction de l'effet aléatoire

$$\widehat{b}_i = \widehat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{Z}_i^\top \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}(Y_i - \mathbf{X}_i\widehat{\beta})$$

Effet fixe ou aléatoire?

- Il n'y a pas de consensus sur la définition d'effets fixes et aléatoires...
- De manière générale, la différence entre les deux est
  - les **effets fixes** sont utilisés quand on a peu de groupes et beaucoup de valeurs au sein de chaque groupe. On s'intéresse à l'effet au sein du groupe (m petit, n_i grands).
  - les **effets aléatoires** sont employés dans les cas de figure où il y a suffisamment de niveaux et de variabilité pour estimer de manière fiable la variance de l'effet aléatoire; on ne s'intéresse pas au niveau du groupe (m grand, n_i petit, variabilité).